



Mejora de la estabilidad, robustez y tiempo de cómputo en CRHPC con BDU

C. Ramos*, M. Martínez, J. Sanchis

*Instituto de Automática e Informática Industrial, Universidad Politécnica de Valencia.
Edificio 8G- Acceso D - Planta 3. Camino de Vera, s/n, 46022 Valencia, España.*

Resumen

En este artículo, se ofrecen diferentes leyes de control de Control Predictivo Basado en Modelos con el fin de mejorar la estabilidad y robustez. El *Constrained Receding-Horizon Predictive Control* (CRHPC) proporciona estabilidad (en ausencia de incertidumbre), y la técnica *Bounded Data Uncertainties* (BDU) proporciona una regularización guiada que mejora el mal condicionamiento y la robustez, resultando en el original CRHPC-BDU. El objetivo de este artículo consiste, por una parte, en ofrecer leyes de control alternativas para el CRHPC, usando diferentes herramientas matemáticas y compararlas. Éstos constituyen la base para extender dichas estrategias al CRHPC-BDU. Así, una de las principales contribuciones consiste en obtener una versión de CRHPC-BDU más robusta y con menor coste computacional. Copyright © 2013 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Palabras Clave: Regularización, Técnicas Minimax, Robustez, Estabilidad, Incertidumbre.

1. Introduction

En el contexto del control de procesos, la estrategia Control Predictivo Basado en Modelos (MPC, *Model Predictive Control*) se puede encontrar en una amplia variedad de aplicaciones industriales (Qin and Badgwell, 1997, 2003; Lee, 2011). En este caso, las acciones de control se calculan mediante la optimización de una función de coste a lo largo de un horizonte de tiempo móvil (horizonte de predicción). Dicho índice incorpora unos factores de ponderación empíricos para las acciones de control, los cuales mejoran la robustez del sistema (Camacho and Bordóns, 2004).

Frente al ajuste empírico de dicha penalización del esfuerzo de control, la técnica BDU (*Bounded Data Uncertainties*) proporciona una manera guiada de sintonizado, que se usa habitualmente en problemas de estimación de parámetros (Sayed et al., 2002; Subramanian and Sayed, 2004; Watson, 2001), pero escasamente en el control de procesos (Ramos et al., 2005, 2007; Sayed et al., 1998).

Dentro del MPC, un esquema que proporciona estabilidad del bucle cerrado, es el *Constrained Receding-Horizon Predictive Control* (CRHPC) (Clarke and Scattolini, 1991; Rossiter and Kouvaritakis, 1994), el cual logra dicho cometido mediante la imposición de restricciones sobre la salida.

Así, fusionando, por una parte el CRHPC y por otra BDU, se obtiene el controlador CRHPC-BDU (Ramos et al., 2008, 2009), que proporciona robustez y estabilidad. Por tanto, la técnica BDU sirve para sintonizar, de un modo guiado, el parámetro de penalización del esfuerzo de control del CRHPC cuando hay incertidumbre.

Como aportaciones principales de este trabajo, por una parte, se ha profundizado en el CRHPC, ofreciendo leyes de control para el mismo diferentes a la original y la presentada en trabajos previos (Ramos et al., 2009), con diferentes herramientas y comprobando la equivalencia entre ellas. Lo cual sirve de base para plantear también otras leyes de control del CRHPC-BDU, diferentes a la presentada en trabajos previos (Ramos et al., 2008, 2009), y que consiguen mejoras en la estabilidad del sistema en presencia de incertidumbre, robustez y tiempo de cómputo.

La estructura del artículo es la siguiente: Inicialmente, la sección 2, constituye una extensión de la introducción donde se plantea el controlador CRHPC, la sección 3 presenta las diferentes leyes de control del CRHPC, y se comparan. En la sección 4 se presentan, brevemente, los fundamentos de la técnica BDU, para mostrar en la sección 5, las diferentes leyes de control para el CRHPC-BDU. Posteriormente, se plasman las bondades del CRHPC-BDU en diferentes ejemplos sobre una columna de destilación, en la sección 6. Y finalmente, las conclusiones en la sección 7.

*Autor en correspondencia

Correos electrónicos: cramos@isa.upv.es (C. Ramos),
mmiranzo@isa.upv.es (M. Martínez), jsanchis@isa.upv.es (J. Sanchis)

2. Fundamentos del CRHPC

El CRHPC (Clarke and Scattolini, 1991) es una variante del GPC (Clarke et al., 1987a,b) que garantiza la estabilidad del bucle cerrado al imponer restricciones sobre la salida. La idea básicamente consiste en calcular una secuencia de acciones de control futuras (horizonte de control N_u) para forzar a que la salida predicha sea exactamente igual a la referencia durante un horizonte m suficientemente largo tras el horizonte de predicción N .

En realidad, se utilizan algunos grados de libertad (g.d.l.) del controlador para forzar esta igualdad mientras que el resto se utilizan para minimizar el índice de coste a lo largo del horizonte de predicción. A partir del GPC, se plantea el CRHPC de la siguiente forma

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \left[\|\mathbf{G}_1 \Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2 \right] \quad (1)$$

s.a. $\mathbf{G}_2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{e}_2$

siendo \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 matrices que se forman a partir de los coeficientes de la respuesta ante escalón unitario, para los horizontes N y m , respectivamente, \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 la diferencia entre los vectores de referencia futura y la predicción de la respuesta libre, para los horizontes N y m , respectivamente, $\Delta \mathbf{u}$ es el vector de los futuros incrementos de acciones de control (para el horizonte N_u) y ρ el parámetro de penalización del esfuerzo de control.

Definiendo las matrices

$$\tilde{\mathbf{G}}_{N_u \times N_u} = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}]^{-1} \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_{m \times m} = [\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T]^{-1} \quad (3)$$

se puede obtener una solución original analítica a este problema de minimización utilizando multiplicadores de Lagrange, produciendo el siguiente resultado (Yoon and Clarke, 1995)

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}}] \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{e}_2. \quad (4)$$

El resultado es bastante más complejo y con una carga computacional mayor que la solución de un GPC estándar, y además hay que tener cuidado con la inversión de las matrices $\tilde{\mathbf{G}}$ y \mathbf{M} , puesto que se pueden dar casos de mal condicionamiento.

Un modo de evitar la inversión de matrices, consiste en plantear la siguiente ecuación lineal extendida (Yoon and Clarke, 1995)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde ν es el multiplicador de Lagrange para la restricción terminal. El sistema se resuelve fácilmente mediante eliminación Gaussiana. A partir del sistema

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

siendo $\tilde{\mathbf{G}}^{-1}$ y $\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T$ matrices no singulares, y usando el *complemento de Schur* y aplicando el lema de inversión de matrices

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}}] & \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

se puede obtener la solución (4) para $\Delta \hat{\mathbf{u}}$.

3. Nuevas leyes de control del CRHPC

En esta sección, se presentan y describen tres soluciones alternativas al CRHPC original, es decir, tres leyes de control para CRHPC distintas en apariencia a la presentada en (4), pero equivalentes, ya que proporcionan similares resultados, y se comprueba su equivalencia.

La ventaja de estas nuevas leyes de control frente a (4) radica en el hecho de que ya no requieren la inversión de dos matrices, a lo sumo una, estando menos expuesto a problemas de mal condicionamiento.

Por otra parte, estas soluciones alternativas son la base y fundamento para poder obtener nuevas leyes de control para el CRHPC-BDU, como se verá en la sección 5, donde se obtienen considerables mejoras. A continuación se muestran las tres soluciones alternativas del CRHPC, y posteriormente se comprueba su equivalencia.

3.1. La solución mediante $\mu \rightarrow \infty$

Una forma interesante de obtener una solución al problema (1) consiste en plantearlo como un problema de mínimos cuadrados regularizado sin restricción. Así, la ecuación (1) resulta

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left[\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}_\mu\|_2^2 \right] \quad (8)$$

para valores elevados de μ . Se ha sustituido el vector de los futuros incrementos de las acciones de control $\Delta \mathbf{u}$ por $\Delta \mathbf{u}_\mu$, ya que en este caso la solución depende del valor de μ . En (Golub and van Loan, 1996) se demuestra que $\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu \rightarrow \Delta \hat{\mathbf{u}}$ (solución (4)) conforme $\mu \rightarrow \infty$.

Si se hace el cambio de variables $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1, \mu \mathbf{G}_2]^T$, $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mu \mathbf{e}_2]^T$ se obtiene

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left[\|\mathbf{G} \Delta \mathbf{u}_\mu - \mathbf{e}\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}_\mu\|_2^2 \right] \quad (9)$$

y entonces la solución, que depende de μ , resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \rho \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e} \quad (10)$$

que tras deshacer el cambio de variables

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 + \rho \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{e}_2]. \quad (11)$$

Así, se obtiene una ley de control que proporciona resultados similares a (4), conforme $\mu \rightarrow \infty$.

3.2. La solución mediante GSVD

Se puede eliminar la dependencia de μ de la solución anterior (aplicando el límite $\mu \rightarrow \infty$) usando la *Generalized Singular Value Decomposition* (GSVD) (Golub and van Loan, 1996).

A partir de (8) primero se supone $\rho = 0$ por simplicidad (luego se mostrará el caso $\rho \neq 0$).

• Caso con $\rho = 0$:

Sabiendo que $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$ con $N \geq N_u$ y $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{m \times N_u}$ con $N_u \geq m$, se pueden definir las siguientes matrices ortogonales $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y una matriz invertible $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$ tales que permiten transformar \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 en matrices diagonales (con $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$)

$$\mathbf{C}^T \mathbf{G}_1 \mathbf{X} = \mathbf{D}_\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_u}) \in \mathbb{R}^{N \times N_u} \quad (12)$$

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{X} = \mathbf{D}_\beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^{m \times N_u}. \quad (13)$$

A partir de estas definiciones se puede expresar el problema (8) con $\rho = 0$

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| [\mathbf{G}_1, \mu \mathbf{G}_2]^T \Delta \mathbf{u}_\mu - [\mathbf{e}_1, \mu \mathbf{e}_2]^T \right\|_2^2 \quad (14)$$

siendo $\mathbf{G}_1 = \mathbf{C} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{X}^{-1}$, $\mathbf{G}_2 = \mathbf{Z} \mathbf{D}_\beta \mathbf{X}^{-1}$, como

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| [\mathbf{C} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{X}^{-1}, \mu \mathbf{Z} \mathbf{D}_\beta \mathbf{X}^{-1}]^T \Delta \mathbf{u}_\mu - [\mathbf{e}_1, \mu \mathbf{e}_2]^T \right\|_2^2. \quad (15)$$

Si se saca factor común \mathbf{X}^{-1} y se añade \mathbf{C}^T y \mathbf{Z}^T , no se altera la norma

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| [\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_\alpha, \mu \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{D}_\beta]^T \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{u}_\mu - [\mathbf{C}^T \mathbf{e}_1, \mu \mathbf{Z}^T \mathbf{e}_2]^T \right\|_2^2 \quad (16)$$

por lo que resulta (siendo $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I}$)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| [\mathbf{D}_\alpha, \mu \mathbf{D}_\beta]^T \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{u}_\mu - [\mathbf{C}^T \mathbf{e}_1, \mu \mathbf{Z}^T \mathbf{e}_2]^T \right\|_2^2. \quad (17)$$

Si se define $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{u}_\mu \quad (18)$$

se obtiene

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| [\mathbf{D}_\alpha, \mu \mathbf{D}_\beta]^T \mathbf{y} - [\mathbf{C}^T \mathbf{e}_1, \mu \mathbf{Z}^T \mathbf{e}_2]^T \right\|_2^2 \quad (19)$$

y si se desglosan las siguientes matrices por columnas, $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_N]$, $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m]$ y $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_u}]$, entonces se puede expresar la solución $\hat{\mathbf{y}}$ para μ elevados como

$$\hat{\mathbf{y}}_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \beta_i \mathbf{z}_i^T \mathbf{e}_2}{\alpha_i^2 + \mu^2 \beta_i^2} & i = 1, \dots, m \\ \frac{\mathbf{c}_i^T \mathbf{e}_1}{\alpha_i} & i = m + 1, \dots, N_u. \end{cases} \quad (20)$$

Gracias a que las matrices \mathbf{D}_α y \mathbf{D}_β son diagonales, la solución ya no se expresa en formato matricial, sino elemento a elemento, pues aparecen escalares y multiplicaciones de vectores fila por vectores columna. En la solución se ve que aparecen dos grupos, por una parte, los elementos que van desde $i = 1, \dots, m$ que se obtienen para cumplir con la restricción terminal impuesta durante dicho horizonte, y posteriormente, si sobran g.d.l., es decir, si $N_u > m$ (para $i = m + 1, \dots, N_u$), se minimiza el índice general sabiendo que ya está asegurado el cumplimiento de la restricción terminal.

Tras deshacer el cambio de variables anterior

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = \mathbf{X} \hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_u}] [\hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_{N_u}]^T \quad (21)$$

y, por tanto, resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \beta_i \mathbf{z}_i^T \mathbf{e}_2}{\alpha_i^2 + \mu^2 \beta_i^2} \mathbf{x}_i + \sum_{i=m+1}^{N_u} \frac{\mathbf{c}_i^T \mathbf{e}_1}{\alpha_i} \mathbf{x}_i. \quad (22)$$

Se observa que sólo el primer sumatorio (en el horizonte de la restricción terminal), es el que depende de μ .

La ventaja de haber aplicado la GSVD radica en que como la expresión ya no es matricial, sino que se usan escalares y vectores, es más sencillo aplicar el límite $\mu \rightarrow \infty$. Así, tras aplicar el límite, la solución que ya no depende de μ resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{z}_i^T \mathbf{e}_2}{\beta_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=m+1}^{N_u} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_1}{\alpha_i} \mathbf{x}_i. \quad (23)$$

• Caso con $\rho \neq 0$:

Para el caso $\rho \neq 0$, el problema (8) se puede expresar como

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \sqrt{\rho} \mathbf{I} \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (24)$$

donde con el cambio de variables $\tilde{\mathbf{G}}_1 = [\mathbf{G}_1, \sqrt{\rho} \mathbf{I}]^T$, $\tilde{\mathbf{e}}_1 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{0}]^T$, $\tilde{\mathbf{G}}_2 = \mathbf{G}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2$ se obtiene

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| [\tilde{\mathbf{G}}_1, \mu \tilde{\mathbf{G}}_2]^T \Delta \mathbf{u}_\mu - [\tilde{\mathbf{e}}_1, \mu \tilde{\mathbf{e}}_2]^T \right\|_2^2 \quad (25)$$

que sólo se diferencia de (14) en que las matrices $\tilde{\mathbf{G}}_1$ y $\tilde{\mathbf{e}}_1$ tienen dimensiones $\tilde{\mathbf{G}}_1 \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times N_u}$ (y por tanto, $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times (N+N_u)}$, con $\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{c}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{N+N_u}]$) y $\tilde{\mathbf{e}}_1 \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times 1}$.

Aplicando la GSVD se puede obtener una solución similar a (23). Ahora se aplica la GSVD que $\tilde{\mathbf{G}}_1$ y $\tilde{\mathbf{G}}_2$, que se transforman en matrices diagonales (con $\tilde{\alpha}_i \geq 0, \tilde{\beta}_i \geq 0$)

$$\tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{D}}_{\tilde{\alpha}} = \text{diag}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{N_u}) \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times N_u} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}^T \tilde{\mathbf{G}}_2 \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{D}}_{\tilde{\beta}} = \text{diag}(\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_m) \in \mathbb{R}^{m \times N_u} \quad (27)$$

y se obtiene

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_1 + \mu^2 \tilde{\beta}_i \tilde{\mathbf{z}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_2}{\tilde{\alpha}_i^2 + \mu^2 \tilde{\beta}_i^2} \tilde{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=m+1}^{N_u} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_1}{\tilde{\alpha}_i} \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (28)$$

que tras aplicar el límite $\mu \rightarrow \infty$ resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{\mathbf{z}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_2}{\tilde{\beta}_i} \tilde{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=m+1}^{N_u} \frac{\tilde{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_1}{\tilde{\alpha}_i} \tilde{\mathbf{x}}_i. \quad (29)$$

3.3. La solución mediante SVD

A continuación sólo se plasma la solución del CRHPC con SVD, ya presentada en (Ramos et al., 2009), la cual, tras cumplir la restricción terminal, resuelve el índice de coste para el resto de g.d.l. Como se muestra en (Ramos et al., 2008, 2009), con la *Singular Value Decomposition* (SVD) de $\mathbf{G}_2 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, y con $\mathbf{H} \in \mathcal{N}(\mathbf{G}_2)$, espacio nulo de \mathbf{G}_2 , que representa los g.d.l. disponibles, tras cumplir la restricción terminal, se obtiene

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I})] \mathbf{G}_2^+ \mathbf{e}_2, \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T (\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}) \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (31)$$

siendo \mathbf{G}_2^+ la pseudoinversa de \mathbf{G}_2 , y donde sólo se requiere invertir una matriz frente a la inversión de dos en (4).

3.4. Equivalencia entre soluciones

Se han planteado tres formas equivalentes de expresar la ley de control del CRHPC, frente a la original (4), primero usando la expresión cuando $\mu \rightarrow \infty$ (11), mediante la GSVD (29) y por último mediante el uso de la SVD, (30) y (31).

La equivalencia de las dos primeras formulaciones, (11) y (29), se desprende del hecho que ambas derivan del mismo planteamiento (8).

Pero la diferencia radica en que en (11), la solución se obtiene para valores elevados de μ (es aproximada), pues no se obtiene una expresión analítica aplicando el límite $\mu \rightarrow \infty$, al tratarse de una ecuación matricial, mientras que en (29), gracias a la aplicación de la GSVD, se aplica el límite con facilidad a la solución aproximada (28) y se elimina la dependencia de μ , obteniendo una solución exacta.

Se podría cuantificar el error que se comete en función del valor de μ elegido. Así pues, restando a la solución real (29) la solución aproximada (28), se obtiene la diferencia

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} - \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_i (\tilde{\beta}_i \tilde{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_1 - \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{z}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_2)}{\tilde{\beta}_i (\tilde{\alpha}_i^2 + \mu^2 \tilde{\beta}_i^2)} \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (32)$$

donde se observa que conforme $\mu \rightarrow \infty$, la diferencia tiende a cero y la solución aproximada tiende a la exacta. En la práctica, para valores suficientemente grandes de μ , no se aprecia diferencia entre ambas soluciones, tal y como se mostrará posteriormente en los ejemplos.

La tercera formulación (SVD), aun partiendo de la misma expresión (1), divide el problema en dos partes, primero cumple con la restricción terminal y posteriormente, si sobran g.d.l. en la solución, se minimiza el índice de coste.

En cierta manera, en la solución con GSVD, se observa que se realiza algo similar, pues como se comentó en dicha sección, en la solución (28) se ve que aparecen dos grupos, por una parte, los elementos que van desde $i = 1, \dots, m$ que se obtienen para

cumplir con la restricción terminal impuesta durante dicho horizonte, y posteriormente, si sobran g.d.l., es decir, si $N_u > m$ (para $i = m+1, \dots, N_u$), se minimiza el índice general sabiendo que ya está asegurado el cumplimiento de la restricción terminal.

Por tanto, aunque el objetivo del presente trabajo no consiste en demostrar analíticamente la equivalencia entre soluciones (se verá la comparación entre soluciones en la sección de ejemplos, viendo los resultados de las simulaciones), sí se estima que así es, dado que todas parten del mismo problema (1), pero siguen desarrollos matemáticos diferentes.

Sin pretender ser una demostración rigurosa, si se va a comprobar, a modo de ejemplo, si se cumple para una caso particular (por sencillez, un ejemplo con $m = 1$ y $N_u = 2$).

Así, si la solución con SVD y la solución original son equivalentes, los términos que multiplican a \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 deberían ser similares, respectivamente. Por simplicidad, se considerará sólo la parte de (4) que multiplica a \mathbf{e}_1

$$\tilde{\mathbf{G}} [\mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T (\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T)^{-1} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}}] \mathbf{G}_1^T \quad (33)$$

que debe ser igual a la correspondiente de (30)

$$\mathbf{H} [\mathbf{H}^T (\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \rho \mathbf{I}) \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T. \quad (34)$$

Es decir

$$\tilde{\mathbf{G}} [\mathbf{I} - \mathbf{G}_2^T (\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T)^{-1} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}}] = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (35)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T (\mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2^T)^{-1} \mathbf{G}_2 \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (36)$$

Ejemplo: A modo de ejemplo se asumen las matrices siguientes, siendo $m = 1$ y $N_u = 2$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = [r_1, r_2]. \quad (37)$$

Se obtiene una base nula \mathbf{H} para \mathbf{G}_2 , $\mathcal{N}(\mathbf{G}_2) = \mathbf{H}$, por ejemplo $\mathbf{H} = [\frac{-r_2}{r_1}, 1]^T$, verificando $\mathbf{G}_2 \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Sustituyendo las matrices $\tilde{\mathbf{G}}$, \mathbf{G}_2 y \mathbf{H} tanto en (33) como (34) se obtiene el mismo resultado

$$\frac{g_2 g_3 - g_1 g_4}{r_2^2 g_4 + r_2 [g_2 + g_3] r_1 + g_1 r_1^2} \begin{bmatrix} -r_2^2 & r_2 r_1 \\ r_2 r_1 & -r_1^2 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

por lo que para este caso particular sí se cumple que dicha equivalencia es cierta. ■

Por otra parte, se van a analizar ciertas propiedades que se pueden extraer de las ecuaciones anteriores. Así, si no se elige cualquier base nula de \mathbf{G}_2 , sino la que se obtiene a partir de la matriz ortonormal \mathbf{V} de la SVD, $\mathcal{N}(\mathbf{G}_2) = \mathbf{H}$, entonces de la SVD de $\mathbf{G}_2 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, resulta

$$\mathbf{\Sigma}_{m \times N_u} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times (N_u - m)} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (40)$$

y si se descompone \mathbf{V} en dos matrices

$$\mathbf{V}_{N_u \times N_u} = [\mathbf{J}_{N_u \times m} \quad \mathbf{H}_{N_u \times (N_u - m)}], \quad (41)$$

siendo \mathbf{H} la base nula, que se construye a partir de las $(N_u - m)$ columnas de \mathbf{V} asociadas al resto de g.d.l.

Entonces la expresión (36) se satisface incluso si se sustituye \mathbf{G}_2^T por la parte de \mathbf{V} que no representa la base nula, esto es, $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{G}_2^T$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{J}[\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{J}]^{-1}\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{H}[\mathbf{H}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T. \quad (42)$$

Ejemplo: Se va a comprobar, a modo de ejemplo, que sustituyendo $\mathbf{G}_2 = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ en (35) resulta que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{I} - \mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^T[\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^T]^{-1}\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{G}}] &= \\ &= \mathbf{H}[\mathbf{H}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T, \end{aligned} \quad (43)$$

y por tanto

$$\tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{I} - \mathbf{V}\Sigma^T[\Sigma\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{V}\Sigma^T]^{-1}\Sigma\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{G}}] = \mathbf{H}[\mathbf{H}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T. \quad (44)$$

Siendo $\mathbf{V}\Sigma^T = \mathbf{J}\mathbf{S}$ se obtiene

$$\tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{I} - \mathbf{J}\mathbf{S}[\mathbf{S}\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{J}\mathbf{S}]^{-1}\mathbf{S}\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}}] = \mathbf{H}[\mathbf{H}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T \quad (45)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{I} - \mathbf{J}[\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{J}]^{-1}\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}}] = \mathbf{H}[\mathbf{H}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T \quad (46)$$

y así, se comprueba que se obtiene (42)

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{J}[\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{J}]^{-1}\mathbf{J}^T\tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{H}[\mathbf{H}^T\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T. \quad (47)$$

Por otra parte, para este ejemplo, se comprueba que se cumplen las siguientes propiedades

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{J}\mathbf{J}^T \neq \mathbf{I}, \quad (48)$$

$$\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}\mathbf{H}^T \neq \mathbf{I}, \quad (49)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I}. \quad (50)$$

■

4. Fundamentos del BDU

El problema *Bounded Data Uncertainties* (BDU) o *Incertidumbre Acotada en los Datos* (Chandrasekaran et al., 1998; Sayed et al., 1998, 2002; Subramanian and Sayed, 2004), también llamado *Min-Max*, o *Robust Least-Squares* (RLS) se propuso y resolvió en (Chandrasekaran et al., 1998; Ghaoui and Lebret, 1997). Entre los diferentes planteamientos del problema BDU (Sayed et al., 2002), uno muy útil en el contexto de la identificación y control es

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A \\ \|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b}} \left[\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b \right]^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 = \quad (51)$$

$$= \min_{\mathbf{x}} \left[\left(\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\mathbf{x}\|_2 + \eta_b \right)^2 + \rho \|\mathbf{x}\|_2^2 \right] \quad (52)$$

siendo $(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m)$ el modelo nominal (con $m \geq n$), y $(\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{b})$ el modelo real perturbado, no conocido, aunque se conoce una cota, η_A y η_b , tal que $\|\delta\mathbf{A}\|_2 \leq \eta_A$ y $\|\delta\mathbf{b}\|_2 \leq \eta_b$, siendo ρ el parámetro empírico de penalización (en ausencia de incertidumbre) para la variable de minimización $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La técnica BDU modifica la solución del problema de mínimos cuadrados regularizado original

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \rho\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} \quad (53)$$

cuando la incertidumbre está presente. Así, la técnica BDU sustituye ρ por λ (Chandrasekaran et al., 1998)

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}, \quad (54)$$

$$\lambda = \frac{\eta_A \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 + \eta_A \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 + \eta_b}. \quad (55)$$

Dicho sistema de ecuaciones no lineal se resuelve mediante un método iterativo de localización de raíces tipo bisección para resolver la ecuación secular de λ (55).

5. Nuevas leyes de control del CRHPC-BDU

Del mismo modo que se utilizó la técnica BDU para mejorar la robustez del controlador LQR (*Linear Quadratic Regulator*) en (Ramos et al., 2005, 2007), también se puede sintonizar el CRHPC mediante BDU (CRHPC-BDU) con el mismo objetivo.

En esta sección, se plasman tres leyes de control alternativas para el CRHPC-BDU, a partir de la extensión de las previamente planteadas para el CRHPC. En concreto, se plantean las 2 primeras ($\mu \rightarrow \infty$, y usando la GSVD) como la novedad, frente a la tercera (usando SVD) que ya fue presentada en trabajos anteriores (Ramos et al., 2008, 2009), y que sólo se plasma aquí para facilitar la lectura del artículo.

Se pone de manifiesto que los dos nuevos planteamientos ($\mu \rightarrow \infty$, y GSVD) no son equivalentes al presentado en (Ramos et al., 2008, 2009) con SVD, de hecho, presentan mejoras, ya que ofrecen un controlador más robusto y, uno de los métodos, un menor coste computacional. Sólo son equivalentes las 3 leyes de control en ausencia de incertidumbre, ya que resultaría un CRHPC.

Partiendo del problema original del CRHPC (1), donde se considera que las matrices \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 y los vectores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 verdaderos son $\mathbf{G}_1 + \delta\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2 + \delta\mathbf{G}_2$ y $\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 + \delta\mathbf{e}_2$, respectivamente, donde se desconoce $\delta\mathbf{G}_1$, $\delta\mathbf{G}_2$, $\delta\mathbf{e}_1$, $\delta\mathbf{e}_2$.

Pero sí se conoce una cota η_{G_1} , η_{G_2} , η_{e_1} y η_{e_2} , respectivamente, se puede obtener la ley de control del CRHPC-BDU, planteándolo como un problema BDU sujeto a la restricción terminal para el peor caso

$$\begin{aligned} \min_{\Delta\mathbf{u}} \max_{\substack{\|\delta\mathbf{G}_1\|_2 \leq \eta_{G_1} \\ \|\delta\mathbf{e}_1\|_2 \leq \eta_{e_1}}} & \left[\|\mathbf{G}_1 + \delta\mathbf{G}_1\Delta\mathbf{u} - [\mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{e}_1]\|_2^2 + \rho \|\Delta\mathbf{u}\|_2^2 \right] \\ \text{s.a.} \quad \max_{\substack{\|\delta\mathbf{G}_2\|_2 \leq \eta_{G_2} \\ \|\delta\mathbf{e}_2\|_2 \leq \eta_{e_2}}} & \|[\mathbf{G}_2 + \delta\mathbf{G}_2]\Delta\mathbf{u} - [\mathbf{e}_2 + \delta\mathbf{e}_2]\|_2 = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

A continuación, se plasman las diferentes soluciones al problema CRHPC-BDU planteado.

5.1. La solución mediante $\mu \rightarrow \infty$

Del mismo modo que en el CRHPC, una forma interesante de obtener una solución a este problema consiste en solucionar el problema BDU sin restricción siguiente

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}_1\|_2 \leq \eta_{G_1} \\ \|\delta \mathbf{e}_1\|_2 \leq \eta_{e_1} \\ \|\delta \mathbf{G}_2\|_2 \leq \eta_{G_2} \\ \|\delta \mathbf{e}_2\|_2 \leq \eta_{e_2}}} \left[\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 + \delta \mathbf{G}_1 \\ \mu [\mathbf{G}_2 + \delta \mathbf{G}_2] \\ [\mathbf{e}_1 + \delta \mathbf{e}_1] \\ \mu [\mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_2] \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu \right\|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}_\mu\|_2^2 \right] \quad (57)$$

para valores elevados de μ . Llamando

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{G}_1 \\ \mu \delta \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{e}_1 \\ \mu \delta \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

y asumiendo $\|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G$

$$\|\delta \mathbf{G}\|_2 = \sqrt{\|\delta \mathbf{G}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\delta \mathbf{G}_2\|_2^2} \leq \eta_G, \quad (60)$$

siendo

$$\eta_G = \sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2}, \quad \eta_e = \sqrt{\eta_{e_1}^2 + \mu^2 \eta_{e_2}^2}, \quad (61)$$

resulta

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \max_{\substack{\|\delta \mathbf{G}\|_2 \leq \eta_G \\ \|\delta \mathbf{e}\|_2 \leq \eta_e}} \left[\|\mathbf{G} + \delta \mathbf{G}\|_2 \Delta \mathbf{u}_\mu - [\mathbf{e} + \delta \mathbf{e}] \|_2^2 + \rho \|\Delta \mathbf{u}_\mu\|_2^2 \right], \quad (62)$$

cuya solución BDU, teniendo en cuenta las expresiones (54) y (55), resulta

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda_G \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{e}, \quad (63)$$

$$\lambda_G = \frac{\eta_G \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{G} \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}\|_2 + \eta_G \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2 + \eta_e}, \quad (64)$$

y tras deshacer el cambio de variables se puede expresar como un problema BDU que se resuelve de forma similar a las ecuaciones (54) y (55)

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_2 + \lambda_G \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + \mu^2 \mathbf{G}_2^T \mathbf{e}_2], \quad (65)$$

$$\lambda_G = \frac{\sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2} \sqrt{\|\mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2^2}}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2} + \frac{\rho \sqrt{\|\mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2^2}}{\sqrt{\|\mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_1\|_2^2 + \mu^2 \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2^2} + \sqrt{\eta_{G_1}^2 + \mu^2 \eta_{G_2}^2} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2 + \sqrt{\eta_{e_1}^2 + \mu^2 \eta_{e_2}^2}}. \quad (66)$$

5.2. La solución mediante GSVD

Al igual que con el CRHPC, se puede obtener una solución al problema anterior que no dependa de μ (tras aplicar el límite $\mu \rightarrow \infty$) haciendo uso de la GSVD (*Generalized Singular Value Decomposition*) (Golub and van Loan (1996)).

Teniendo en cuenta que se debe aplicar el límite $\mu \rightarrow \infty$, resulta que el escalar λ_G se podría simplificar

$$\lambda_G = \frac{\eta_{G_2} \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu - \mathbf{e}_2\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu\|_2} \mu^2 = \tilde{\lambda} \mu^2. \quad (67)$$

Comparando la solución (11) del CRHPC con la del CRHPC-BDU (ecuaciones (65) y (67)), la única diferencia radica en que se ha sustituido el parámetro ρ por λ_G .

Así pues, se puede expresar el CRHPC-BDU como un problema de mínimos cuadrados sin restricción, similar a (24)

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \sqrt{\tilde{\lambda}} \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (68)$$

donde con el siguiente cambio de variables resulta

$$\tilde{\mathbf{G}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2 \\ \sqrt{\tilde{\lambda}} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_\mu} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mu \tilde{\mathbf{G}}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\mu - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mu \tilde{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (70)$$

y se puede hacer uso de la GSVD, calculando las matrices ortogonales \mathbf{C} y \mathbf{Z} y la matriz invertible \mathbf{X} , como se mostró con el CRHPC, obteniendo una solución similar a (23).

5.3. La solución mediante SVD

La ley de control del CRHPC-BDU mediante SVD se obtiene en (Ramos et al., 2008, 2009), luego aquí sólo se plasma el resultado

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^* \mathbf{G}_1^T \mathbf{e}_1 + [\mathbf{I} - \mathbf{M}^* [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \lambda_2 \mathbf{I}]] \Delta \hat{\mathbf{u}}_p, \quad (71)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_p = \mathbf{G}_2^T [\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T + \lambda_{G_2} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{e}_2, \quad (72)$$

$$\lambda_{G_2} = \frac{\eta_{G_2} \|\mathbf{G}_2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p - \mathbf{e}_2\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2}, \quad (73)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \lambda_1 \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T, \quad (74)$$

$$\lambda_1 = \frac{\eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2}{\|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2} + \frac{\rho \|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2}{\left[\|\mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]\|_2 + \eta_{G_1} \|\mathbf{H}\|_2 \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_f\|_2 + [\eta_{e_1} + \eta_{G_1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_p\|_2] \right]}, \quad (75)$$

$$(76)$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho \| \mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p] \|_2}{\left[\begin{array}{l} \| \mathbf{G}_1 \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{u}}_f - [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p] \|_2 + \\ + \eta_{G_1} \| \mathbf{H} \|_2 \| \Delta \hat{\mathbf{u}}_f \|_2 + [\eta_{e_1} + \eta_{G_1} \| \Delta \hat{\mathbf{u}}_p \|_2] \end{array} \right]}, \quad (77)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}_f = [\mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 + \lambda_1 \mathbf{I}] \mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{H}^T \mathbf{G}_1^T [\mathbf{e}_1 - \mathbf{G}_1 \Delta \hat{\mathbf{u}}_p] - \lambda_2 \mathbf{H}^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_p]. \quad (78)$$

5.4. Prestaciones de las leyes de control del CRHPC-BDU

Frente a la solución original mediante SVD (ecuaciones de (71) a (78)), presentada y desarrollada en (Ramos et al., 2008, 2009), en este trabajo se plantean otras dos versiones (con $\mu \rightarrow \infty$ y GSVD) que no son equivalentes a la original, sino que suponen una mejora en cuanto a la robustez del sistema, y una de ellas, incluso mejora el coste computacional.

Eso es debido a que en (60) se considera un límite para la incertidumbre mayor, de forma global, por lo que el método resulta más robusto. Por tanto, se consigue mejorar la robustez, al mismo tiempo que, también se reduce el coste computacional, tal y como se mostrará en los ejemplos de la sección 6.

6. Ejemplos. Columna de destilación

La columna de destilación es probablemente uno de los procesos más populares de la literatura de ingeniería química. En la figura 1 se muestra el esquema de una columna de destilación binaria.

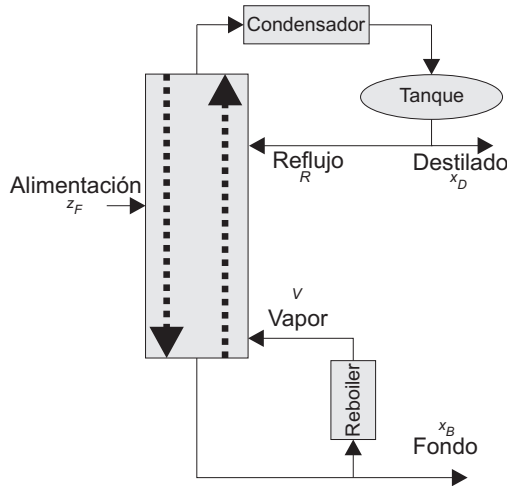


Figura 1: Esquema del destilador.

La fracción molar del componente más volátil z_F determina la composición de la alimentación, la fracción molar x_B la del fondo y la fracción x_D la del destilado (Luyben, 1996). Centrando la atención en la parte inferior de la columna (calderín) se puede sintonizar un controlador que ajuste el vapor V para controlar la fracción x_B .

El incremento del vapor V puede provocar dos efectos opuestos (ver (Luyben, 1996)), uno de corta duración (x_1) que aumenta x_B , modelado como un sistema de primer orden

$$G_1(s) = \frac{k_1}{\tau_1 s + 1}$$

y otro de mayor duración (x_2), que disminuye x_B , también de primer orden

$$G_2(s) = \frac{-k_2}{\tau_2 s + 1}.$$

Considerando $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ resulta un sistema de fase no mínima como se muestra en la figura 2, donde se muestra la respuesta de ambos subsistemas ante entrada escalón.

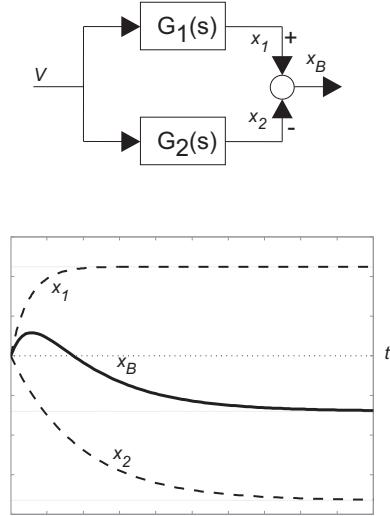


Figura 2: Diagrama y respuesta ante escalón.

En el presente trabajo, se particularizará los modelos con los siguientes valores

$$\begin{array}{ll} k_1 = 2 & k_2 = 3.25 \\ \tau_1 = 5 & \tau_2 = 10 \end{array}$$

por lo que el sistema a controlar $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ resulta

$$G(s) = \frac{0.075(s - 0.33)}{(s + 0.2)(s + 0.1)}.$$

A continuación, se presenta una serie de ejemplos donde se plasman las principales aportaciones y conclusiones de este trabajo.

6.1. Ejemplo 1. Equivalencia de las diferentes leyes de control del CRHPC

En este ejemplo, se muestra que las diferentes leyes de control del CRHPC mostradas en la sección 3 (mediante $\mu \rightarrow \infty$, GSVD y SVD) coinciden con el original (4).

Así, asumiendo el sistema de la columna de destilación $G(s)$ descrito anteriormente y sintonizando el CRHPC con los siguientes parámetros

$$N = 8, m = 3, N_u = 5, \rho = 1$$

y un periodo de muestreo de $T = 1$ seg., las cuatro respuestas ante cambios en la referencia del CRHPC, coinciden tal y como se muestra en la figura 3.

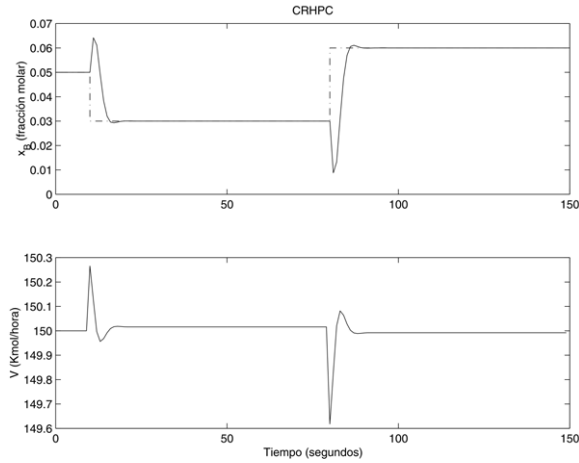


Figura 3: Respuesta del CRHPC en ausencia de incertidumbre. Se plasma el resultado del CRHPC mediante $\mu \rightarrow \infty$, GSVD, SVD y el original. Como se observa, las cuatro respuestas son coincidentes.

6.2. Ejemplo 2. CRHPC-BDU mejora el condicionamiento y la robustez frente al CRHPC

En este ejemplo se muestra cómo la incertidumbre puede provocar inestabilidad del CRHPC, y cómo el CRHPC-BDU puede solventar dicho problema mejorando la robustez y el mal condicionamiento del sistema.

Así considerando incertidumbre en $G_1(s)$ y $G_2(s)$, en concreto se asumirán variaciones en los parámetros de ganancia estática (k_1 y k_2) y constante de tiempo (τ_1 y τ_2) de hasta un 15 %, se muestra en la figura 4 cómo el CRHPC proporciona una respuesta inestable.

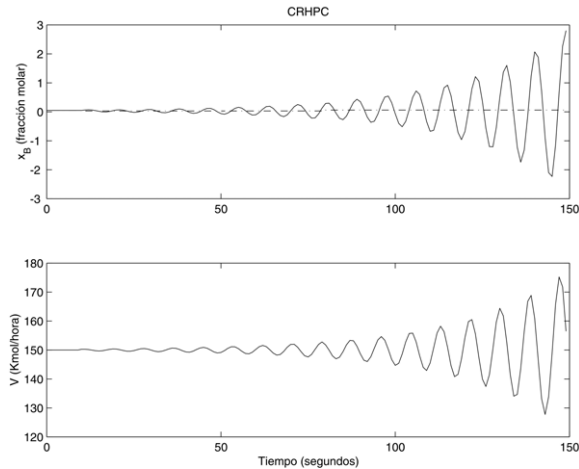


Figura 4: Respuesta del CRHPC en presencia de incertidumbre. Con cualquiera de las cuatro versiones de CRHPC ($\mu \rightarrow \infty$, GSVD, SVD y el original) se obtiene una respuesta inestable. En la figura se muestra la respuesta para la versión con SVD.

En cambio el CRHPC-BDU, en cualquiera de las tres versiones presentadas (cuando $\mu \rightarrow \infty$, GSVD o SVD) se obtiene una respuesta estable, mediante el ajuste dinámico de los parámetros de regularización λ_{G_2} , λ_1 y λ_2 .

En concreto, en la figura 5 se muestra la respuesta estable para la versión con SVD.

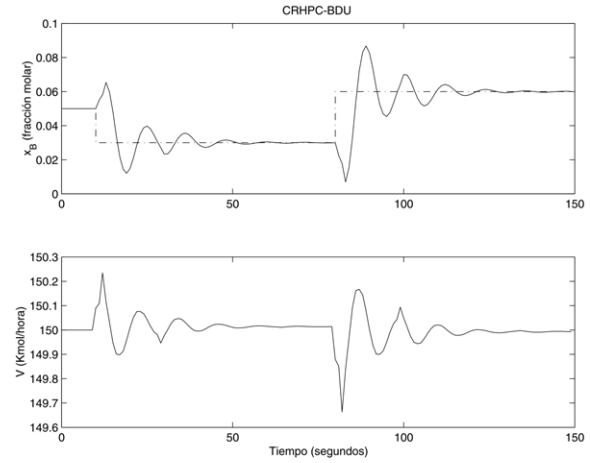


Figura 5: Respuesta del CRHPC-BDU en presencia de incertidumbre. Con cualquiera de las tres versiones de CRHPC-BDU ($\mu \rightarrow \infty$, GSVD y SVD) se obtiene una respuesta estable. En la figura se muestra la respuesta para la versión con SVD.

En (Ramos et al., 2008, 2009) se muestra cómo el CRHPC-BDU sintoniza los parámetros de regularización λ_{G_2} , λ_1 y λ_2 en cada instante de muestreo mejorando el número de condición κ de las matrices a invertir (sólo se muestra para los parámetros λ_{G_2} y λ_1 , puesto que λ_2 no interviene en ninguna inversión de matrices).

Tabla 1: Reducción del mal condicionamiento del CRHPC-BDU

Parám.	κ	κ con λ	Reduc.	κ con λ	Reduc.
(λ)	($\lambda=0$)	(media)	(%)	(mín.)	(%)
λ_{G_2}	9638.2	581.96	93.96	1.044	99.98
λ_1	1.0007	1.0006	0.0055	1	0.0682

En la tabla 1 se muestra para cada parámetro λ (λ_{G_2}, λ_1) de regularización, el valor del número de condición κ original, es decir, si dicho parámetro λ vale cero. Por otra parte, se muestra el valor de κ medio y mínimo obtenido para todo el intervalo de simulación cuando se considera $\lambda \neq 0$. Asimismo, se muestra, en porcentaje, la reducción que significa respecto del valor original.

Se observa que el mayor efecto se consigue con λ_{G_2} , ya que el número de condición original es elevado, obteniendo en media una reducción de un 93.96 % y en algún momento llegando incluso al 99.98 %.

6.3. Ejemplo 3. Comparación entre las diferentes versiones del CRHPC-BDU

En este ejemplo se muestra cómo las versiones cuando $\mu \rightarrow \infty$ y GSVD del CRHPC son ligeramente diferentes a la de SVD, debido al hecho de considerar la incertidumbre de una forma global y presentar mayor robustez. Así, continuando con el ejemplo 2, donde se suponía una incertidumbre de un 15 % en los

parámetros, se muestra en la figura 6 cómo la respuesta cuando $\mu \rightarrow \infty$ y GSVD es más suave y oscila menos que ante la versión SVD.

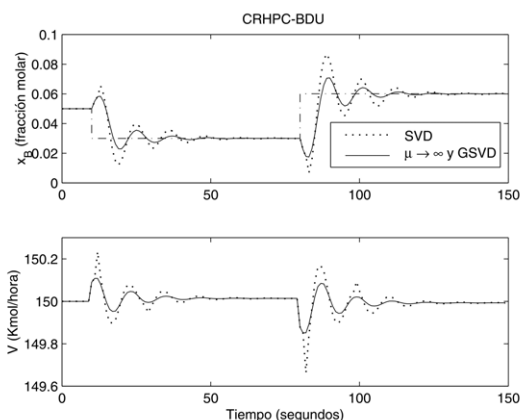


Figura 6: Comparación entre diferentes versiones del CRHPC-BDU. Se observa cómo la respuesta cuando $\mu \rightarrow \infty$ y GSVD son similares, y es más suave y oscila menos que ante la versión SVD.

Por otra parte, cuanto más pequeña es la incertidumbre más se parecen ambas respuestas, convergiendo a la misma respuesta en ausencia de incertidumbre, ya que en ese caso, ya no sería el CRHPC-BDU, sino el CRHPC, y ahí todos los planteamientos son equivalentes.

6.4. Ejemplo 4. Mejora de la robustez del CRHPC-BDU original

En este ejemplo se muestra cómo de entre las diferentes leyes de control del CRHPC-BDU presentadas en la sección 5, las versiones cuando $\mu \rightarrow \infty$ y GSVD, suponen una mejora respecto a la planteada mediante SVD ((Ramos et al., 2008, 2009)). Así, como se comentó anteriormente, el hecho de considerar la incertidumbre de una forma global, permite un límite mayor para la incertidumbre y redundante en más robustez.

En la figura 6 del ejemplo anterior se observó que cualquier versión del CRHPC-BDU estabilizaba el sistema ante una incertidumbre en los parámetros del 15 %.

En cambio, si se considera que dicha incertidumbre puede ser de hasta un 22 %, y para los controladores diseñados en el ejemplo anterior que suponían un 15 % de incertidumbre, la versión con SVD no logra estabilizar el sistema, mientras que las otras dos aún logran mantenerlo estable, tal y como se muestra en la figura 7, aunque, obviamente, se degradan las prestaciones respecto al ejemplo anterior (mayor tiempo de establecimiento y oscilaciones).

Finalmente, podría ser interesante detectar la cota máxima de incertidumbre para la que los métodos con $\mu \rightarrow \infty$ y GSVD tampoco logran estabilizar. En este caso, para una incertidumbre del 26 % ambos métodos también se tornan inestables.

6.5. Ejemplo 5. Reducción del coste computacional del controlador CRHPC-BDU

En este ejemplo se muestra cómo además de mejorar la robustez, como se vio en el ejemplo anterior, se puede reducir

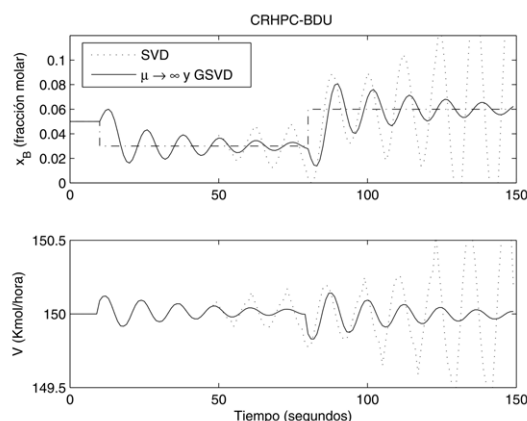


Figura 7: Mejora de la robustez del CRHPC-BDU. Se observa cómo la respuesta cuando $\mu \rightarrow \infty$ y GSVD son similares, y todavía logran mantener el sistema estable, frente a la inestabilidad que proporciona la versión SVD.

también el coste computacional del CRHPC-BDU planteado mediante SVD en (Ramos et al., 2008, 2009).

Así pues, se propone comprobar el coste computacional de manera experimental, pero no sólo para una simulación, como en los ejemplos anteriores, sino para 100 simulaciones, por lo que en la figura (8) se muestra, mediante un trazo, para cada uno de los tres métodos, el coste computacional en segundos para cada iteración del algoritmo (instante de tiempo) a lo largo del horizonte de tiempo (en concreto se ha elegido un intervalo de 100 seg.), y a su vez se han realizado 100 simulaciones, por lo que se muestra el coste en cada instante para las 100 simulaciones (100 trazos).

Para este ejemplo, se ha llevado a cabo los cálculos con un PC con procesador i5 a 3.20 GHz, con 4 Gb de memoria RAM, y con el software Matlab, versión R2009b.

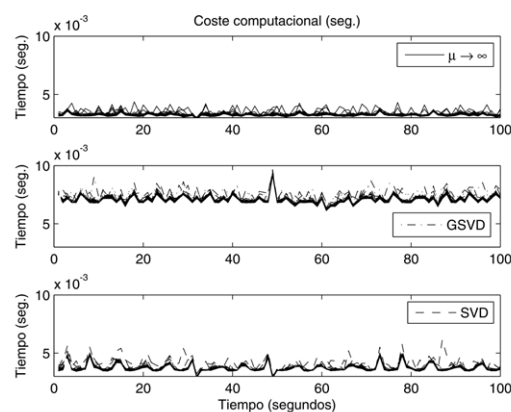


Figura 8: Coste computacional (para los tres métodos) en segundos para cada iteración del algoritmo (100 seg.). Se han llevado a cabo 100 simulaciones.

Con estos resultados, se procede a realizar una comparación entre los tres métodos. Para ello, se muestra en la figura (9) la media del coste de las 100 simulaciones del algoritmo, obteniéndose así un sólo trazo del coste computacional a lo

largo del intervalo de tiempo y a su vez, mediante una línea horizontal, el valor medio de dicho trazo, para obtener un valor cuantitativo único para cada método.

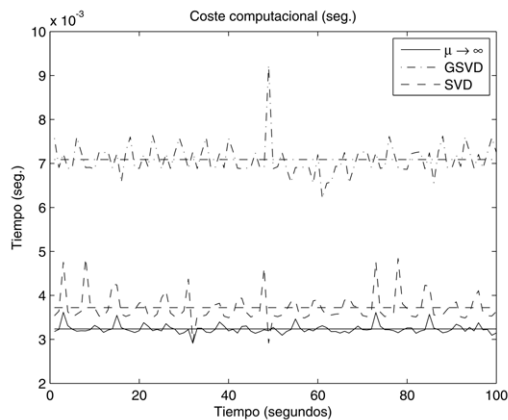


Figura 9: Media del coste de las 100 simulaciones a lo largo del intervalo de tiempo y valor medio de dicho coste (línea horizontal) para cada método.

De la figura (9) se desprende que para este conjunto de simulaciones, el método cuando $\mu \rightarrow \infty$ presenta un menor coste computacional que el original con SVD presentado en trabajos previos (no así el método con GSVD, debido a su expresión no en formato matricial, sino con cálculo elemento a elemento con sumatorios, lo cual requiere un coste mayor).

Por tanto, en este caso, frente al planteamiento mediante SVD (con un valor medio del coste de 0.0037 seg.), la versión cuando $\mu \rightarrow \infty$ proporciona un valor de 0.0032 seg., que significa un 13 % menos de coste en media. Analizando las curvas del coste, en algunos instantes del horizonte de tiempo, esta reducción de coste es significativamente importante, llegando a un máximo de hasta un 34 % para el instante 78 seg.

Concluyendo, para este caso particular de 100 simulaciones, el método con $\mu \rightarrow \infty$ es más rápido, intentando inferir que de alguna forma eso sería podría ser generalizable para más situaciones.

7. Conclusiones

En este trabajo, como principales aportaciones, se presentan diferentes leyes de control del CRHPC, mostrando la analogía entre los mismos. Por otra parte, la incorporación de la técnica BDU al CRHPC mejora el mal condicionamiento de las matrices, regularizando el sistema y por tanto mejorando la robustez del mismo ante la presencia de incertidumbre, situación en la cual el CRHPC sin BDU puede no funcionar bien.

Las nuevas leyes de control para el CRHPC mejoran la robustez frente a la original que se planteó en (Ramos et al., 2008, 2009), y también se consigue una reducción del coste computacional, tal y como se ha demostrado en los ejemplos.

English Summary

Improvement of stability, robustness and computational cost in CRHPC with BDU.

Abstract

In this work, different control laws of Model Predictive Control (MPC) are offered in order to improve the stability and robustness aspects. The CRHPC (Constrained Receding-Horizon Predictive Control) provides de stability (in the absence of uncertainty), and the BDU (Bounded Data Uncertainties) technique provides a guided regularization improving the robustness and ill-conditioning, presenting the original CRHPC-BDU.

The objective of this work consists, on the one hand, of offering alternative control laws of the CRHPC, using different mathematical tools and comparing them. These ones constitute the basis for the different statements for extending these strategies to the CRHPC-BDU. So, one of the main contribution consists of obtaining a more robust and with less computational cost version of CRHPC-BDU.

Keywords:

Regularization, Minimax techniques, Robustness, Stability, Uncertainty.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el MEC, con los proyectos ENE2011-25900, TIN2011-28082, y por el proyecto PROMETEO/2012/028 de la Consellería de Educación, Formación y Empleo de la Generalitat Valenciana.

Referencias

- Camacho, E. F., Bordóns, C., October 2004. Control predictivo: Pasado, presente y futuro. RIAI, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, CEA-IFAC 1 (3).
- Chandrasekaran, S., Golub, G. H., Gu, M., Sayed, A. H., 1998. Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties. SIMAX 19 (1), 235–252.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C., Tuffs, P. S., 1987a. Generalized Predictive Control-Part I. Automatica 23 (2), 137–148.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C., Tuffs, P. S., 1987b. Generalized Predictive Control-Part II. Extensions and Interpretations. Automatica 23 (2), 149–160.
- Clarke, D. W., Scattolini, R., July 1991. Constrained receding-horizon predictive control. IEEE Proceedings-D 138 (4), 347–354.
- Ghaoui, L. E., Lebret, H., 1997. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. SIMAX 18 (4), 1035–1064.
- Golub, G. H., van Loan, C. F., 1996. Matrix Computations, 3rd Edition. Johns Hopkins University Press, Baltimore ; London.
- Lee, J. H., June 2011. Model predictive control: Review of the three decades of development. International Journal of Control, Automation, and Systems 9 (3), 415–424.
- Luyben, W. L., 1996. Process Modelling, Simulation and Control for Chemical Engineers. Chemical Eng. Series. Mc Graw-Hill.
- Qin, S. J., Badgwell, T. A., 1997. An overview of industrial model predictive control technology. In: Kantor, J. C., Garcia, C. E., Carnahan, B. (Eds.), 5th Int. Conf. on Chemical Process Control. Vol. 93. AIChE Symposium Series 316, pp. 232–256.
- Qin, S. J., Badgwell, T. A., 2003. A survey of industrial model predictive control technology. Control Engineering Practice 11, 733–764.
- Ramos, C., Martínez, M., Sanchis, J., Herrero, J. M., June 2008. Robust and stable predictive control with bounded uncertainties. Journal of Mathematical Analysis and Applications (ISSN: 0022-247X) 342/2, 1003–1014.
- Ramos, C., Martínez, M., Sanchis, J., Salcedo, J. V., 2007. LQR robusto mediante incertidumbre acotada en los datos. RIAI, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (ISSN 1697-7912) 4 (3), 61–72.

- Ramos, C., Martínez, M., Sanchis, J., Salcedo, J. V., 2009. Robust constrained receding-horizon predictive control via bounded data uncertainties. *Mathematics and Computers in Simulation* (ISSN: 0378-4754) 79, 1452–1471.
- Ramos, C., Sanchis, J., Martínez, M., Herrero, J. M., 2005. LQR and predictive control tuned via BDU. *Systems Science* (ISSN 0137-1223) 31 (1), 15–25.
- Rossiter, J. A., Kouvaritakis, B., May 1994. Numerical robustness and efficiency of generalised predictive control algorithms with guaranteed stability. *IEE Proc.- Control Theory Applications* 141 (3), 154–162.
- Sayed, A. H., Nascimento, V. H., Chandrasekaran, S., June 1998. Estimation and control with bounded data uncertainties. In: *Linear Algebra and its Applications*. Vol. 284. Elsevier, pp. 259–306.
- Sayed, A. H., Nascimento, V. H., Cipparrone, F. A. M., 2002. A regularized robust design criterion for uncertain data. In: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* Vol. 23. pp. 1120–1142.
- Subramanian, A., Sayed, A. H., June 2004. Regularized robust filters for time varying uncertain discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (6), 970–976.
- Watson, G. A., 2001. Data fitting problems with bounded uncertainties in the data. In: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* Vol. 22. pp. 1274–1293.
- Yoon, T. W., Clarke, D. W., 1995. A reformulation of receding-horizon predictive control. *Int J System Science* 26 (7), 1383–1400.

Apéndice A. Definición de variables

- N : Horizonte de Predicción.
- N_u : Horizonte de Control.
- m : Horizonte de la restricción terminal.
- $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$ con $N \geq N_u$: Matriz formada a partir de los coeficientes de la respuesta ante escalón para el horizonte N .
- $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{m \times N_u}$ con $N_u \geq m$: Matriz formada a partir de los coeficientes de la respuesta ante escalón para el horizonte m .
- $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{N \times 1}$: Diferencia entre la referencia futura y la predicción de la respuesta libre, para el horizonte N .
- $\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^{m \times 1}$: Diferencia entre la referencia futura y la predicción de la respuesta libre, para el horizonte m .
- $\delta \mathbf{G}_1, \delta \mathbf{G}_2, \delta \mathbf{e}_1, \delta \mathbf{e}_2$: Incertidumbre de $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{e}_1$ y \mathbf{e}_2 , de la misma dimensión que éstas, respectivamente.
- $\Delta \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$: Vector solución de los futuros incrementos de las acciones de control, para el horizonte N_u .
- $\Delta \hat{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$: Vector solución de los futuros incrementos de las acciones de control, dependiente del parámetro μ .
- ρ : Parámetro de penalización del esfuerzo de control.
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}, \mathbf{D}_\alpha \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$: Matrices de la GSVD de \mathbf{G}_1 .

- $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}, \mathbf{D}_\beta \in \mathbb{R}^{m \times N_u}$: Matrices de la GSVD de \mathbf{G}_2 .
- $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times (N+N_u)}, \tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}, \tilde{\mathbf{D}}_{\tilde{\alpha}} \in \mathbb{R}^{(N+N_u) \times N_u}$: Matrices de la GSVD de $\tilde{\mathbf{G}}_1$.
- $\tilde{\mathbf{Z}} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}, \tilde{\mathbf{D}}_{\tilde{\beta}} \in \mathbb{R}^{m \times N_u}$: Matrices de la GSVD de $\tilde{\mathbf{G}}_2$.
- $\mathbf{V}_{N_u \times N_u}, \mathbf{\Sigma}_{m \times N_u}, \mathbf{S}_{m \times m}, \mathbf{U}_{m \times m}$: Matrices de la SVD de \mathbf{G}_2 .
- σ : Valores singulares, en la matriz $\mathbf{\Sigma}$.
- $[\mathbf{J}_{N_u \times m} \quad \mathbf{H}_{N_u \times (N_u - m)}]$: Partición de la matriz \mathbf{V} de la SVD de la matriz \mathbf{G}_2 .
- $\mathbf{H} = \mathcal{N}(\mathbf{G}_2)$: Espacio nulo de la matriz \mathbf{G}_2 , asociado a los valores singulares nulos.
- \mathbf{I} : Matriz identidad.
- $\eta_{G_1}, \eta_{G_2}, \eta_{e_1}, \eta_{e_2}$: Cota de la incertidumbre de las matrices o vectores $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, respectivamente.
- $\lambda_{G_2}, \lambda_1, \lambda_2$: Parámetros de regularización de la aplicación del BDU al CRHPC.
- κ : Número de condición.

Apéndice B. Siglas

- g.d.l.: Grados de libertad.
- MPC: *Model Predictive Control*, Control Predictivo Basado en Modelos.
- BDU: *Bounded Data Uncertainties*, Incertidumbre Acotada en los Datos.
- GPC: *Generalized Predictive Control*, Control Predictivo Generalizado.
- LQR: *Linear Quadratic Regulator*, o también Regulador Lineal Cuadrático.
- CRHPC: *Constrained Receding-Horizon Predictive Control*, Control Predictivo con Restricción Terminal.
- CRHPC-BDU: Es el regulador que combina CRHPC y BDU.
- SVD: *Singular Value Decomposition*, Descomposición en Valores Singulares.
- GSVD: *Generalized Singular Value Decomposition*, Descomposición Generalizada en Valores Singulares.
- RLS: *Robust Least-Squares*, Mínimos Cuadrados Robusto.